Vektorfelder und graphische Analyse gewöhnlicher Differentialgleichungen

In der bisherigen Behandlung gewöhnlicher Differentialgleichungen erster Ordnung haben wir verschiedene explizite Lösungsverfahren kennengelernt. In vielen Fällen ist es jedoch entweder sehr aufwendig oder grundsätzlich unmöglich, eine geschlossene Lösung anzugeben. Dennoch lassen sich oft qualitative Aussagen über das Verhalten der Lösungen treffen.

Ziel dieses Abschnitts ist es, gewöhnliche Differentialgleichungen geometrisch und graphisch zu interpretieren. Zentrale Werkzeuge sind dabei Richtungsfelder, Vektorfelder und Stabilitätsbegriffe.

Gewöhnliche Differentialgleichungen erster Ordnung

Wir betrachten eine allgemeine gewöhnliche Differentialgleichung erster Ordnung der Form

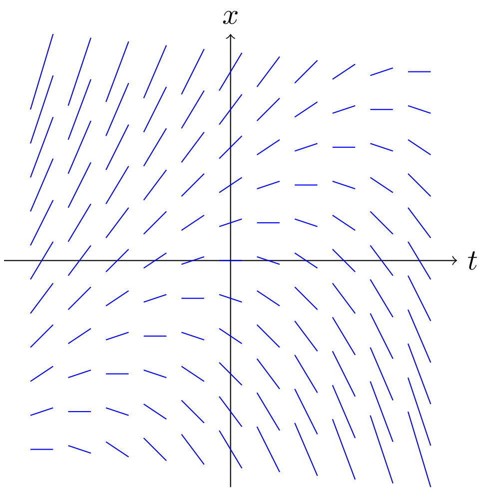
$$\dot{x}(t) = f(t, x(t)),$$

wobei $f\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine gegebene Funktion ist. Die Änderungsrate von $x(t)$ hängt im Allgemeinen sowohl von der Zeit t als auch vom aktuellen Zustand $x(t)$ ab.

Richtungsfelder

Zu jeder Differentialgleichung der Form $\dot{x} = f(t, x)$ lässt sich ein *Richtungsfeld* konstruieren. Dazu betrachtet man für viele Punkte (t, x) in der t-x-Ebene den Wert $f(t, x)$ und zeichnet an dieser Stelle einen kurzen Strich mit der entsprechenden Steigung.

Eine Funktion $x(t)$ ist genau dann eine Lösung der Differentialgleichung, wenn ihr Graph an jedem Punkt die durch das Richtungsfeld vorgegebene Steigung besitzt. Lösungen können daher als Kurven interpretiert werden, die sich tangential an das Richtungsfeld anschmiegen.



$\dot{x} = x - t$

Richtungsfelder erlauben es, das qualitative Verhalten von Lösungen zu untersuchen, ohne die Differentialgleichung explizit zu lösen.

Graphische Konstruktion von Lösungen

Ausgehend von einem Anfangswert $x(t_0) = x_0$ kann eine Lösung näherungsweise konstruiert werden, indem man dem Richtungsfeld schrittweise folgt.

Dieses Verfahren verdeutlicht insbesondere:

- das lokale Verhalten von Lösungen,
- die Abhängigkeit von Anfangswerten,
- mögliche Unterschiede im Langzeitverhalten.

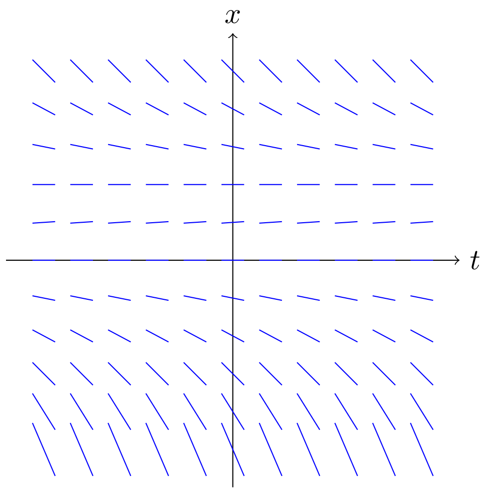
Autonome Differentialgleichungen als Spezialfall

Eine wichtige Klasse gewöhnlicher Differentialgleichungen sind die *autonomen* Gleichungen

$$\dot{x} = f(x).$$

Hier hängt die Änderungsrate nicht explizit von der Zeit ab. Das Richtungsfeld ist daher translationsinvariant in Zeitrichtung: Verschiebungen entlang der t-Achse verändern das Richtungsfeld nicht.

Diese Eigenschaft ermöglicht eine besonders anschauliche geometrische Interpretation und vereinfacht die qualitative Analyse erheblich.



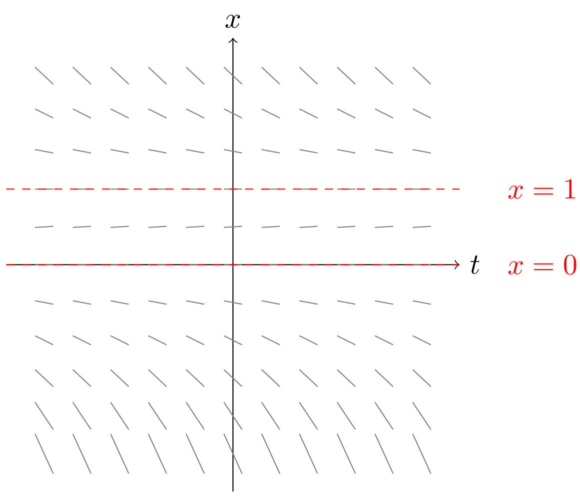
$\dot{x} = x(1 - x)$

Ruhelagen

Im autonomen Fall spielt der Begriff der *Ruhelage* eine zentrale Rolle. Ein Punkt $x^* \in \mathbb{R}$ heisst Ruhelage, falls

$$f(x^*) = 0.$$

Dann ist $x(t) \equiv x^*$ eine konstante Lösung der Differentialgleichung. Ruhelagen erscheinen im Richtungsfeld als Punkte, an denen die Steigung verschwindet.



Stabilität von Ruhelagen

Das Verhalten von Lösungen in der Umgebung einer Ruhelage führt zum Begriff der Stabilität. Eine Ruhelage x^* heisst

- *stabil*, wenn Lösungen mit Anfangswerten nahe bei x^* für alle Zeiten in seiner Nähe bleiben,
- *asymptotisch stabil*, wenn zusätzlich
$$\lim_{t\to\infty} x(t) = x^*$$
gilt,
- *instabil*, wenn es beliebig nahe Anfangswerte gibt, deren Lösungen sich von x^* entfernen.

Im eindimensionalen autonomen Fall lässt sich die Stabilität oft direkt aus dem Vorzeichen von $f(x)$ links und rechts von x^* ablesen.

Beispiel: Qualitative Analyse

Wir betrachten die Differentialgleichung

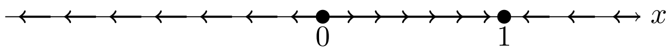
$$\dot{x} = x(1 - x).$$

Die Ruhelagen sind

$$x^* = 0 \quad \text{und} \quad x^* = 1.$$

Für $0 < x < 1$ gilt $f(x) > 0$, für $x < 0$ und $x > 1$ gilt $f(x) < 0$. Daraus folgt:

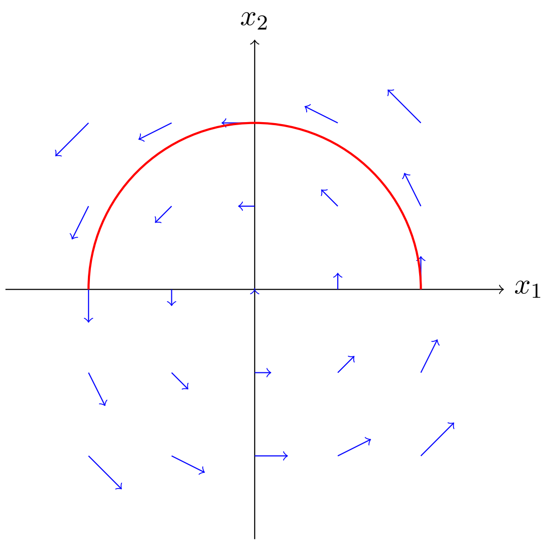
- $x = 0$ ist instabil,
- $x = 1$ ist asymptotisch stabil.



$\dot{x} = x(1 - x)$

Vektorfelder und geometrische Interpretation

Der Begriff des Richtungsfeldes ist ein Spezialfall des allgemeineren Konzepts eines *Vektorfeldes*. Ein Vektorfeld ordnet jedem Punkt des Zustandsraumes einen Vektor zu, der die momentane Änderungsrichtung beschreibt.



Integralkurve im Phasenraum

Gewöhnliche Differentialgleichungen können daher als Bewegungsgleichungen in einem Vektorfeld interpretiert werden. Lösungen sind die sogenannten *Integralkurven* dieses Vektorfeldes. Diese Lösungskurven stellen Lösungsfunktionen der Differentialgleichung dar.